Průhyb nosníku - Clebschova metoda

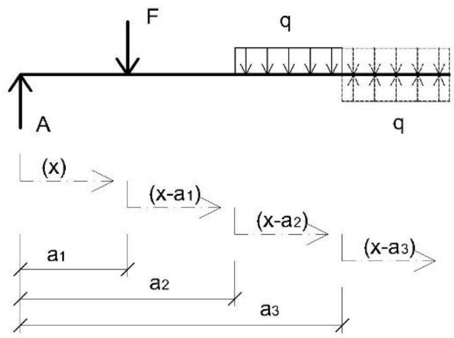
Metoda využívá vztahů používaných při integraci ohybové čáry.

$$\varphi(x) = \int -\frac{M}{EI}dx + C_1$$

$$w(x) = \int \varphi dx + C_2$$

Při postupu se však užijí některá speciální pravidla:

- Ohybový moment začneme vyjadřovat z levé strany nosníku. Změna zatížení (zatížení není v tomto místě popsáno hladkou křivkou) začíná nový úsek, který se v rovnici oddělí svislou čarou. V tomto úseku platí celá předchozí část rovnice a přidá se vliv nového zatížení.
- Vliv spojitého zatížení, které v daném úseku už nepokračuje, je třeba od následujícího úseku odebrat tím, že se přidá opačné zatížení.
- V daném úseku se pracuje s lokálními souřadnicemi tohoto úseku, které se vyjádří pomocí vztahu ($x-a_i$), kde a_i je souřadnice začátku úseku.
- Při integraci je nutné pracovat s celým výrazem v závorce jako s nezávislou proměnnou a závorku neroznásobovat.
- Pokud integrujeme osamělý moment, příslušná proměnná je závorka odpovídající úseku, ve kterém se moment nachází.
- Integrační konstanty vznikající při integraci, jsou platné pro celou rovnici. Je tedy vhodné je přidat do prvního úseku, jehož rovnice platí pro celý nosník.



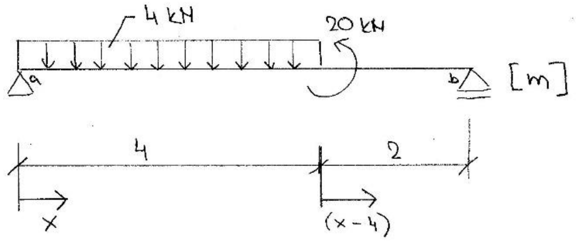
Např. pro nosník na obrázku se napíše rovnice ohybového momentu:

$$M = Ax - \Big|_{x>a_1} - F(x-a_1)\Big|_{x>a_2} - q\frac{(x-a_2)^2}{2}\Big|_{x>a3} + q\frac{(x-a_3)^2}{2}$$

Příklad

Zadání:

Prostý nosník dle obrázku je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením a osamělým momentem. Ohybová tuhost EI je pro celý nosník konstantní. Clebshovou metodou určete rovnici pootočení $\varphi(x)$ a průhybu $w(x)$.



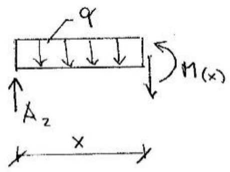
Řešení:

a) Reakce a rovnice ohybového momentu

Rovnici ohybového momentu vyjadřujeme od levé strany, postačí nám určit reakci A_z.

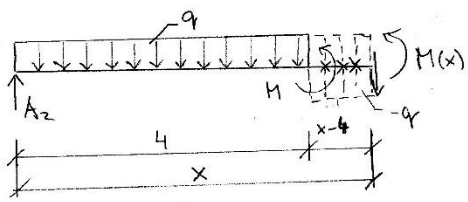
$$A_z = \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + M_c}{6} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 + 20}{6} = 14kN = 14 \cdot 10^3 N$$

Rovnice ohybového momentu pro úsek a-c:



$$M(x) = Ax - \frac{q}{2}x^2$$

Do rovnice přidáme za svislou čáru doplněk pro druhý úsek. To znamená, že pro druhý úsek platí celá rovnice včetně první části. Pro druhou část uvažujeme lokální souřadnici $(x-4)$. Spojité zatížení, které z prvního úseku pokračuje, je třeba od začátku druhého úseku vyeliminovat, tím, že je začneme odečítat.



$$M(x) = Ax - \frac{q}{2}x^2 + |_{x>4} - M + \frac{q}{2}(x-4)^2$$

Po číselném dosazení dostáváme rovnici ohybového momentu. Násobitel 10^3převádí zatížení v kN na vyjádření v základních jednotkách. (Pozn.: Je třeba pracovat v základních jednotkách, protože nepoužíváme jen silové veličiny, ale také deformační.)

$$M(x) \cdot 10^{-3} = 14x - 2x^2 + |_{x>4} - 20 + 2 \cdot (x-4)^2$$

b) Rovnice pootočení

Rovnici ohybového momentu integrujeme podle vztahu

$$\varphi(x) = \int -\frac{M}{EI}dx + C_1$$

a získáme rovnici pro pootočení. Integrační konstanta platí pro celou rovnici, proto ji napíšeme na začátek rovnice, který platí rovněž pro každý bod osy nosníku. V první části se za proměnou považuje souřadnice x, ve druhé souřadnice $(x-4)$.

$$EI\varphi(x)\cdot 10^{-3} = C_1 + \int -Mdx = C_1 - 7x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \Big|_{x>4} + 20\cdot(x-4) - \frac{2}{3}(x-4)^3$$

Podepření nosníku neumožňuje vyjádřit v některém z bodů pootočení, takže zatím nemůžeme vyjádřit z žádné okrajové podmínky konstantu C_1.

c) Rovnice průhybu

Rovnici pootočení integrujeme podle vztahu

$$w(x) = \int \varphi dx + C_2$$

a získáme rovnici průhybu. Integrační konstanta znovu platí pro celou rovnici, proto ji napíšeme na začátek rovnice. V první části se za proměnou považuje souřadnice x, ve druhé souřadnice $(x-4)$. Násobitel na levé straně rovnice ponecháme z předchozí.

$$EIw(x)\cdot 10^{-3} = C_2 + \int EI\varphi\cdot 10^{-3}dx = C_2 + C_1x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \Big|_{x>4} + 10\cdot(x-4)^2 - \frac{1}{6}(x-4)^4$$

Podepření nosníku umožňuje vyjádřit hodnotu průhybu v obou podporách a z těchto okrajových podmínek pak můžeme určit konstanty C_1, C_2. Začneme podmínkou pro levý konec

$$w_{(x=0)} = 0$$

Tuto podmínku dosadíme do první části rovnice

$$0 = C_2 + C_1 0 - \frac{7}{3}0^3 + \frac{1}{6}0^4$$

A získáme konstantu

$$C_2 = 0$$

Druhá podmínka je pro pravý konec nosníku

$$w_{(x=6)} = 0$$

Tentokrát dosazujeme do celé rovnice za x hodnotu 6 a za průhyb hodnotu 0.

$$0 = 0 + C_1 6 - \frac{7}{3}6^3 + \frac{1}{6}6^4 + 10(6-4)^2 - \frac{1}{6}(6-4)^4$$

Rovnici upravíme

$$-C_1 6 = -\frac{7}{3}6^3 + \frac{1}{6}6^4 + 10\cdot 2^2 - \frac{1}{6}2^4$$

A po úpravě získáme

$$C_1 = 41{,}7778$$

Hodnoty konstant C_1, C_2 dosadíme do rovnice a získáme finální rovnici průhybu. Násobitel z levé strany je převeden na pravou. Stále platí, že pro první část nosníku platí první část rovnice a pro druhou část nosníku platí celá rovnice.

$$w(x) = \frac{10^3}{EI}\left[41{,}7778x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \Big|_{x>4}\, 10 \cdot (x-4)^2 - \frac{1}{6}(x-4)^4\right]$$